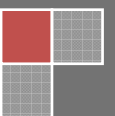


2015

Analyse Maths I

TD N°02 | EG1

Cours Assuré par : _____



Université Moulay Elmadjid
Faculté des Sciences Juridiques,
Economiques et Sociales - 26000 BORDJ



Filière Sciences Economiques et Gestion
-Semestre 1-
Année Universitaire 2015-2016

TD N° 2 d'Analyse Mathématique

Exercice 1.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est : Allez l'expression de f peut être ...

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

- ☐ $f(x) = |x| + 1$
☐ $f(x) = e^x - x$
☐ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}$
☐ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
☐ $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$

- Montrer que G_f admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
- Montrer que f est bijective de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3. Dans chaque cas, déterminez le domaine de définition, les régions de croissance, de décroissance, de concavité et de convexité des fonctions données.

- a) $f(x) = -x^2 - 1$.
 b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.
 c) $f(x) = \begin{cases} |x+3|, & \text{si } x \in [-5, 1] \\ \ln(x) + 4, & \text{si } x \in [1, 5] \end{cases}$

Exercice 4. La fonction d'offre Q exprime la quantité produite q d'un bien en fonction de son prix p : $q = Q(p)$, où :

$$Q(p) = \begin{cases} 4, & \text{si } 0 < p < 2 \\ 8(6-p)^{-1/2}, & \text{si } 2 \leq p < 5 \\ (p-3)^3, & \text{si } p \geq 5 \end{cases}$$

Montrez que Q est continue dans $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est convexe dans chacun des sous-domaines $]0, 2[$, $]2, 5[$ et $]5, +\infty[$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^5 \sqrt{2x-1} dx \quad I_2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2+x^3} dx \quad I_3 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1+\ln x)}$$

Exercice 6. A l'aide d'une intégration par parties calculer les primitives suivantes :

- $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
- $\int \ln(1+x) dx$
- $\int x^2 e^x dx$
- $\int x^3 \cos x$

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

- ☐ f est définie sur $] -1, 1[$.
☐ f est croissante sur $] -1, 1[$.
☐ $f(0) = 1$.
☐ f est une fonction paire.
☐ En écrivant que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$, on obtient $f(x) = \ln(\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 8. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

- $\int_0^1 \ln x dx$
- $\int_1^{+\infty} e^{ax} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{x^5+1} dx$

TD = 2

Ex 1:

Soit f l'application sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être

① $f(x) = |x| - 1$

② $f(x) = e^x - x$

③ $f(x) = x^2 + 1$

④ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

⑤ $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

4) $\Rightarrow$ ① Vrai : $f(x) = |x| - 1$

• $f(0) = -1$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• f est paire et $f'(x) = 1$ pour $x > 0$

 $\Rightarrow$ Donc f est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty, 0]$

a) $\Rightarrow$ Vrai : $f(x) = e^x - x$

• $f(0) = 1$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$

• $+\infty$

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^x - 1$

Si $x = 0 \quad f'(0) = 0$

Si $x < 0 \quad f'(x) < 0$

Si $x > 0 \quad f'(x) > 0$

 f est décroissante dans $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $[0, +\infty[$

3) Soit $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x + 1}$

$f(0) = -3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

f est paire $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x + 1}$

$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{x^3 - 3}{x + 1}$

$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{x^3 - 3}{(x + 1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x - (-1 - \sqrt{2}))(x - (-1 + \sqrt{2}))}{(x + 1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ pour $[-1 - \sqrt{2}, -1]$

$f'(x) > 0$ pour $[-1, -1 + \sqrt{2}]$ et $[1, +\infty[$

$\Rightarrow$ tableau de variations

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-1	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$		-3		$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	
		$\sqrt{2}(2\sqrt{2})$		$\sqrt{2}(2\sqrt{2})$	

4) Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$f(0) = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$

f est paire

$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

donc $\forall x \geq 0, f'(x) \geq 0$

$\Rightarrow f$ est croissante dans $]-\infty, 0]$

f est croissante dans $[0, +\infty[$

5) Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$f(0) = 0 \neq 1$

Exercice 2 :

$\Rightarrow$ Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

1. Montrer que G_f admet un point de symétrie dont on déterminera les coordonnées

2) Montrer que f est bijective de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ sur un intervalle à préciser

$\Rightarrow$ 1.1. Gf admet un point d'inflexion

- $Df \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$: $]0, +\infty[$
- f est continue dans $]0, +\infty[$
- f est deux fois dérivable.

(Propriétés usuelles)

$$\forall u > 0 \quad f'(u) = -\frac{\ln(u)}{u^2}$$

$$f''(u) = \frac{2\ln(u)}{u^3} = 0$$

$$f''(u) = 0 \Rightarrow u = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{et } f(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}}$$

donc Gf admet le point d'inflexion de coordonnées $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}})$

$$\forall u > 0 \quad f'(u) = -\frac{\ln(u)}{u^2}$$

- f est croissante dans $]0, e^{\frac{3}{2}}[$ et décroissante dans $]e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$
- f est concave dans $]0, e^{\frac{3}{2}}[$ et convexe dans $]e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$

$\Rightarrow$ 2. f est strictement décroissante (monotone) dans $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$

- f est continue sur $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$
- $f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ D'après le théorème de bijection, f définit une bijection sur $\mathbb{C}$ vers $]0, 1[$

Exercice 3 (Suite de fonctions)

① $f(x) = -x^2 - 1$

- $Df = \mathbb{R}$
 - f est continue et deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$
- (fonction polynôme)
- f est paire

• $\forall x \geq 0$ $f'(x) = -2x$
 $\Rightarrow f$ croissante dans $\mathbb{R}^+$ et décroissante dans $\mathbb{R}^-$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2$

$\Rightarrow f$ est concave

② $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$

• $Df = \mathbb{R}$

• f continue et 2 fois dérivable dans $\mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 4x$
 $= x(3x - 4)$

x	$-\frac{4}{3}$	0
f'	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$

$\Rightarrow f$ est croissante dans $] -\infty, -\frac{4}{3}]$ et $[0, +\infty[$
et décroissante dans $] -\frac{4}{3}, 0[$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = 6x - 4$

donc f est concave dans $] -\infty, -\frac{2}{3}]$ et convexe
dans $] -\frac{2}{3}, +\infty[$

③

$$f(x) = \begin{cases} \ln 3, & \text{si } x \in [-5, 3] \\ \ln(x) + 4, & \text{si } x \in]3, 5] \end{cases}$$

• $Df = [-5, 5]$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \in [-5, -3] \\ \ln(x) + 4 & \text{si } x \in]-3, 3] \\ \ln(x) + 4 & \text{si } x \in]3, 5] \end{cases}$$

• f continue dans $[-5, 5]$

• f est dérivable dans $[-5, 5] - \{-3\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -5 \leq x < -3 \\ 1/x & \text{si } -3 < x \leq 5 \end{cases}$$

• f décroissante dans $[-5, -3]$ et croissante dans $[-3, 5]$

$$f''(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in [-5, -3] \cup [-3, 5] \\ -\frac{1}{u^2} & \text{si } u \in]3, 5] \end{cases}$$

⇒ f convexe en $[-5, 3]$
et concave en $]3, 5]$

Exercice 4 :

Quantité en fonction des prix

$$Q(p) = \begin{cases} 4, & \text{si } 0 < p < 2 \\ 2(6-p)^{1/2}, & \text{si } 2 \leq p < 5 \\ (p-3)^2, & \text{si } p > 5 \end{cases}$$

• $D \subset]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

• Q est continue dans $\mathbb{R}_+^* \setminus \{2, 5\}$

$$\lim_{p \rightarrow 2^-} Q(p) = \lim_{p \rightarrow 2^+} Q(p) = Q(2) = 4$$

$$\lim_{p \rightarrow 5^-} Q(p) = \lim_{p \rightarrow 5^+} Q(p) = Q(5) = 8$$

⇒ Q continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$Q'(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p < 2 \\ \frac{1}{\sqrt{6-p}} & \text{si } 2 \leq p < 5 \\ 2(p-3) & \text{si } p > 5 \end{cases}$$

donc Q est croissante dans $\mathbb{R}_+^*$

$$Q''(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p < 2 \\ \frac{-1}{2(6-p)^{3/2}} & \text{si } 2 \leq p < 5 \\ 2 & \text{si } p > 5 \end{cases}$$

donc Q est concave dans $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 5 :

$$I_3 = \int_0^5 \sqrt{2u-1} du$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{3} \int_0^5 3(3u-2)^{\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{(3u-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) \\
 &= \frac{36}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^2 \frac{u^2}{2+u^2} du \\
 I_3 &= \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{3u^2}{2+u^2} du \\
 &= \frac{1}{3} [\ln |2+u^2|]_0^2 \\
 &= \frac{1}{3} (\ln 6 - \ln 2) \\
 &= \frac{\ln 3}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^2 \frac{du}{u(5+\ln u)} \\
 I_5 &= \int_0^1 \frac{1}{5+\ln u} du \\
 &= [\ln |5+\ln u|]_0^1 \\
 &= \ln(5+\ln 1)
 \end{aligned}$$

Exercice 6 :

$$+ \int \frac{\ln u}{u^2} du$$

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{l} u = \ln u \\ v = \frac{1}{u^2} \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{array}{l} u' = \frac{1}{u} \\ v' = -\frac{2}{u^3} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln u}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} + \ln u \right] = \int -\frac{1}{u} + \frac{1}{u}$$

$$= -\frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u} + C$$

$$= -\frac{\ln u + 1}{u} + C$$

$$\star \int \ln(3+u) du$$

$$\begin{array}{l} u = \ln(3+u) \\ v' = 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} u' = \frac{1}{3+u} \\ v = u \end{array}$$

$$\int \ln(3+u) = [u \ln(3+u)] - \int \frac{u}{3+u}$$

$$\left(\text{or } \frac{u}{3+u} = \frac{u+3-3}{3+u} = 1 - \frac{1}{3+u} \right)$$

$$\int \frac{u}{3+u} = u - \ln(3+u) + C$$

$$\begin{aligned} \int \ln(3+u) &= u \ln(3+u) - u + \ln(3+u) + C \\ &= (u+1) \ln(3+u) - u + C \end{aligned}$$

$$\star \int u^2 e^u du$$

$$\left[\begin{array}{l} u = u^2 \\ v' = e^u \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} u' = 2u \\ v = e^u \end{array} \right]$$

$$\int u^2 e^u = [u^2 e^u] - \int 2u e^u$$

$$\text{or } \int 2u e^u = 2([u e^u] - \int e^u)$$

$$\begin{aligned} \int u^2 e^u &= u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u + C \\ &= e^u (u^2 - 2u + 2) + C \end{aligned}$$

$$\star \int u^2 \cos u$$

$$\begin{array}{l} u = u^2 \\ v' = \cos u \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} u' = 2u \\ v = \sin u \end{array}$$